შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3	03.05.2014/ მათ/III/ M 320

ამოცანა № 1 გვერდი № 1

განვიხილოთ $n=3$

$$\frac{a^3}{a^2+bc}+\frac{b^3}{b^2+ac}+\frac{c^3}{c^2+ab}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ a_ს და b_ს შევცვლით უტოლობაში ჩავსვამთ $\frac{a+b}{2}$ მარცხენა მხარე შემცირდება, მარჯვენა კი უცვლელი დარჩება.

$$\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^3}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)c}+\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^3}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)c}+\frac{c^3}{c^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab \Rightarrow \frac{c^3}{c^2+ab}\geq\frac{c^3}{c^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\frac{2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{a+b}{2}+c}\leq\frac{a^3}{a^2+bc}+\frac{b^3}{b^2+ac}$$

ე.ი. ჯერ გვესაჭიროება სიმეტრიულ ფუნქციას, რომ სადამ მივიღებთ 2 ცვლადის განსხვავებული რიცხვი ვაჩვენოთ ეს თანაბარი ხდება კი ($a=b=c=\frac{a+b+c}{3}$) და ამ რიცხვისათვის მარცხენა მხარე ცოტაა მარჯვენაზე

ახლა განვიხილოთ n_ისათვის

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2}\geq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

03.05.2014/ მათ/III/ M 320

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

ჩავთვალოთ, რომ მოიძებნება ისეთი i და j რომელთათვისაც სრულდება $a_i > a_{i+1}$ და $a_j < a_{j+1}$. ($a_{n+1} = a_1$)
თუ რომელიმე მათგანი არ მოიძებნა მაშინ ამოცანა ამოხსნილია, რადგან გამოვა, რომ $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ასევე ჩავთვალოთ ოპერაციას ჩავუტარებთ ისეთ $k; k+1, l$, რომ $a_k > a_{k+1}$ და $a_k < a_{k+1}$.

$$\frac{a_{k-2}^3}{a_{k-2}^2 + a_{k-1}\cdot\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)} + \frac{a_{k-1}^3}{a_{k-1}^2 + \left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)^3}{\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\cdot a_{k+2}} + \frac{\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)^3}{\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)^2 + a_{k+2}a_{k+3}} \le$$

$$\le \frac{a_{k-2}^3}{a_{k-2}^2 + a_{k-1}a_k} + \dots + \frac{a_{k+1}^3}{a_{k+1}^2 + a_{k+2}a_{k+3}}.$$

სანამ $a_1; \dots; a_n$ ტოლები არ გახდება მანამდე ჩავატაროთ ეს ოპერაციები.

თავდაპირველი უტოლობის ნაცვლად ჩავწეროთ ჩვეულებრივი ფორმით

$$\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_2a_3} + \dots \ge \frac{2a_1^3}{2a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \dots + \frac{a_n^3}{a_n^2 + a_1^2 + a_2^2}.$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

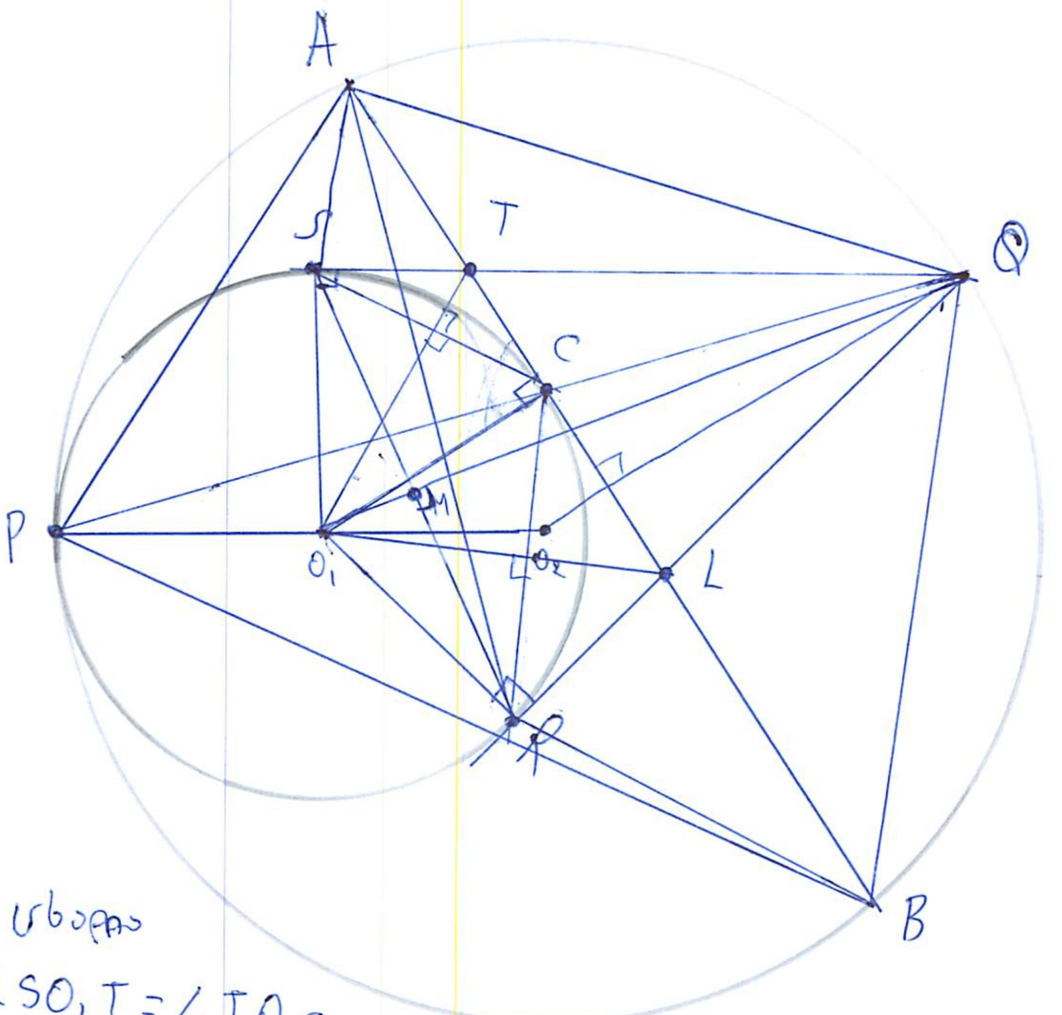
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

03.05.2014/ მათ/III/ M 320

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



ნახაზი

$\angle SO_1T = \angle TO_1C = 90 - \angle STO_1 = 90 - \angle CTO_1$ ანალოგიურად O_1CLR-ში. და SO_1RQ-ში. ასევე ამ ოთხკუთხედებს შემოხაზული წრეწირი $\angle CO_1R = \varphi_1$, $\angle CLR = 180 - \varphi_1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

03.05.2014/ მათ/III/ M 320

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

$\angle RAB = \alpha \quad \angle ALR = 180 - (180 - \varphi_1 + \alpha) = \varphi_1 - \alpha.$

$\angle CRO_1 = \angle CLO_1 = 90 - \frac{\varphi_1}{2}.$

$\angle CRL = \frac{\varphi_1}{2}.$

O_1L მართობულია CR.

$O_1T \perp SC$.

$O_1Q \perp SR$.

$O_2Q \perp AB$ და შუაზე ყოფს AB-ს.

$O_1C \parallel O_2Q$

$AQ = QB$.

PQ $\angle APB$-ს ბისექტრისაა.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

03.05.2014/ მათ/III/ M 320

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ზოგადობის დაუკარგავად ვთქვათ $a_1 \le a_2 \cdots \le a_{2000}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $a_1 \equiv a$; $a_2 = a + B_2$ $\cdots$; $a_{2000} = a + B_{2000}$.

ეხლა განვიხილოთ ისეთი რიცხვები, ~~რომლებ~~ როცა $B=d$ და $A \ne C$.

$A = a_{2000}$ $C = a_{1999}$ $B = d = a_1$. (ცხადია $B_2 \le B_3 \le \dots \le B_{2000}$).

$$\frac{a_{2000}-a_1}{a_{1999}-a_1} = \frac{B_{2000}}{B_{1999}}.$$

$\frac{B_{2000}}{B_{1999}}$ ეს არის უნდა >1-ზე. მაშინ უნდა შესრულდეს.

$$\frac{B_{2000}}{B_{1999}} < 1 + \frac{1}{10^5} = 1+X. \qquad \frac{1}{10^5} \equiv X.$$ დავუშვათ საწინააღმდეგო.

$\frac{B_{2000}}{B_{1999}} \geqslant 1+X$. ანალოგიურად $\frac{B_{1999}}{B_{1998}} \geqslant 1+X$.

ე.ი.

$\frac{B_i}{B_{i-1}} \geqslant 1+X \Rightarrow B_i \geqslant (B_{i-1})(1+X)$. მაშინ

$B_{2000} \geqslant B_{1999}(x+1)$ თუ გადავამრავლებთ მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს.

$\vdots$ $\Longrightarrow B_{2000} \geqslant B_2(x+1)^{1998}$.

$B_3 \geqslant B_2(x+1)$.

~~[illegible]~~

ე.ი. $B_{2000} \geqslant B_2(x+1)^{1998}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3	03.05.2014/ მათ/III/ M320

ამოცანა № 3	გვერდი № 2

ახლა ავიღოთ ისეთი მიმდევრობები, რომლისა $A=C$ $B\neq d$.

$$\frac{a_{2000}-a_2}{a_{2000}-a_1}=\frac{B_{2000}-B_2}{B_{2000}}$$

ცხადია <1-ზე, მაშინ

უნდა ვაჩვენოთ, რომ $1-\frac{B_{2000}-B_2}{B_{2000}}<X.$ $\Rightarrow$

$$\frac{B_2}{B_{2000}}<X$$

B_2 რაც უფრო დიდი იქნება მით უფრო ვერ შესრულდება ეს უტოლობა, ამიტომ ავიღოთ max.

$$B_2\le\frac{B_{2000}}{(1+X)^{1998}}$$

$$\frac{\frac{B_{2000}}{(1+X)^{1998}}}{B_{2000}}<X. \qquad \frac{1}{\left(1+\cancel{10^5}\frac{1}{10^5}\right)^{1998}}<\frac{1}{10^5}.$$

$$\left(1+\frac{1}{10^5}\right)^{1998}>10^5.$$